УДК 517.524

# РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ ФУНКЦИИ sec($x$) + tg($x$)

С.Н. Гладковский

Автором предложен элементарный вывод разложения в цепную дробь функции sec($x$) + tg($x$).
Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь.

Функция $w(x) = \sec(x) + \operatorname{tg}(x)$ являет собой тот редкий случай, когда для простой с виду элементарной функции не удаётся обнаружить разложение в цепную дробь не только ни в одном из общеизвестных справочников (см., например, [3],[4],[5],[8]), но и в многочисленных монографиях специально посвящённых цепным дробям (см., например, [1],[2],[6],[7],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17]). Дабы исправить такое положение, автор предлагает элементарный вывод (найден автором в 2004 г.) разложения в цепную дробь вышеуказанной функции.

Как известно, (см., например, [3],[4]),

$$x\operatorname{ctg}(x) = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \ldots}}}}. \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться, что

$$x\operatorname{ctg}(x) = W_0, \text{ где} \qquad (2)$$

$$W_k = 4k + 1 - \cfrac{x^2}{4k + 3 - \cfrac{x^2}{W_{k+1}}};\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Пусть $E_k(x) = W_k - x$ для любого неотрицательного целого числа $k,$ тогда (3) после несложных преобразований примет следующий вид

$$E_k = 4k + 1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{4k + 3 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{E_{k+1}}}}}. \qquad (4)$$

Поскольку,

$$E_0(x) = W_0 - x = x\operatorname{ctg}(x) - x = \frac{2x}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1},$$

то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sec(x) + \operatorname{tg}(x) = 1 + \frac{x}{E_0\left(\frac{x}{2}\right)}. \qquad (5)$$

Пусть $U_k(x) = E_k\left(\frac{x}{2}\right)$ для любого неотрицательного целого числа $k,$ тогда после упрощения получим

$$U_k(x) = 4k + 1 - \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{4k + 3 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{U_{k+1}(x)}}}}. \qquad (6)$$

Откуда

$$\sec(x) + \operatorname{tg}(x) = 1 + \frac{x}{U_0(x)}. \qquad (7)$$

## Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде /пер. с англ. под ред. Гончара А.А. М.: Мир, 1986, – 502с. ил.
2. Джоунс У., Трон У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения /ред. пер. с

англ.: И.Д. Софронов. М.: Мир, 1985, – 414с. ил.
3. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961.
4. Математический анализ. Вычисление элементарных функций/ Под ред. Люстерника Л.А. и Янпольского А.Р. М.: Физматгиз, 1963.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган /пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной М.: Наука, 1979, 832 стр. с илл.
6. Стилтьес Т.И. Исследования о непрерывных дробях /пер. с фр. под ред. Ахиезера Н.И. Харьков: Государственное научно-техническое издательство Украины, 1936.– 156 с.
7. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Гостехиздат, 1956., 204 с.
8. A.Cuyt, V.Brevik Petersen, B.Verdonk, H.Waadeland , W.B.Jones. Handbook of Continued fractions for Special Functions. New York: Springer, 2008.– 431s.
9. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications.London: Addison-Wesley P C, 1980.– 457s.
10. Lorentzen L., Waadeland H. Continued fractions with applications. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North Holland, 1992.– 623s.
11. Olds C.D. Continued fractions. Yale: Mathematical Association of America, 1963.– 162 s
12. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 1. 3ed., Gottingen: Teubner, 1954.– 200 s.
13. Perron O. Die Lehre von den Kettenbruechen. Band 2. 3ed., Stuttgart: Teubner, 1957.– 322 s.
14. Rockett A.M., Szuesz P. Continued fractions. London: World Scientific Publishing, 1992.– 196s.
15. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 1. Groningen: Noordhoff, 1918.– 467s.
16. Stieltjes T.J. Oeuvres completes, tome 2. Groningen: Noordhoff, 1918.– 609 s.
17. Wall H.S. Analytic theory of continued fractions. New York: Chelsea, 1948.– 445s.

S.N. Gladkovskii

## Continued fraction expansion for function $\sec(x) + \tan(x)$

The autor propose the elementary derivation of the continued fraction expansion for function $\sec(x) + \tan(x)$.

Keywords: continued fraction, chain fraction

Гладковский Сергей Николаевич

Ставропольский край, Георгиевский р-он
ст. Незлобная, ул. Толстого д.14
E-mail: journaly2010@bk.ru

# ОТЗЫВ НА СТАТЬЮ С. Н. ГЛАДКОВСКОГО "РАЗЛОЖЕНИЕ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ ФУНКЦИИ $\sec(x) + \mathrm{tg}(x)$"

Данная работа относится к теории цепных (непрерывных) дробей. Используя известное разложение в цепную дробь функции $x \,\mathrm{ctg}(x)$, автор получает с помощью элементарных преобразований и одного тригонометрического тождества разложение в цепную дробь функции $\sec(x)+\mathrm{tg}(x)$. Замечу, что изучению комбинаторных свойств коэффициентов разложения функции $\sec(x)+\mathrm{tg}(x)$ по степеням $x$ посвящен ряд работ, например, статья [1] является одной из них.

К представленной статье имеется замечание по оформлению работы. Желательно, чтобы автор устранил замеченные недостатки. Так в работе повторяются одни и те же формулы, поэтому, не теряя смысла, повторяющиеся выражения в работе можно выбросить. Например, можно с 13-ой строки статьи написать следующее:

Пусть $E_k(x) = W_k - x$ для любого неотрицательного целого числа $k$, тогда (3) после несложных преобразований примет следующий вид

$$E_k(x) = 4k + 1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{4k + 3 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{E_{k+1}(x)}}}}.$$

Поскольку,

$$E_0(x) = W_0 - x = x\,\mathrm{ctg}(x) - x = \frac{2x}{\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{4}) - 1},$$

то

$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sec(x) + \mathrm{tg}(x) = 1 + \frac{x}{E_0\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Пусть $U_k(x) = E_k\left(\frac{x}{2}\right)$ для любого неотрицательного целого числа $k$, тогда после упрощения получим

$$U_k(x) = 4k + 1 - \cfrac{x}{2 - \cfrac{x}{4k + 3 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{U_{k+1}(x)}}}}.$$

Отсюда

$$\sec(x) + \mathrm{tg}(x) = 1 + \frac{x}{U_0(x)}.$$

Считаю, что работа С. Н. Гладковского "Разложение в цепную дробь функции $\sec(x)+\mathrm{tg}(x)$" заслуживает внимания и после доработки с учетом замечания может быть опубликована в журнале "Математические заметки".

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *J. Millar, N. J. A. Sloane, and N. E. Young,* "A New Operation on Sequences: The Boustrophedon Transform", Journal of Combinatorial Theory, Series A, **76,** 44-54 (1996).

Рецензент

к.ф.-м.н. Р. Н. Бояринов